**ПРОГРАММА КУРСА**

# «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»
## (2004-2005 уч.г.)

1. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных.
2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка.
3. Общая схема метода разделения переменных.
4. Специальные функции математической физики:
   1) Цилиндрические функции. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя. Функции Ханкеля. Функция Неймана. Общее решение уравнения Бесселя. Асимптотическое поведение цилиндрических функций. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента.
   2) Классические ортогональные полиномы. Дифференциальное уравнение. Формула Родрига. Производящая функция. Полиномы Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Полиномы Лагерра. Полиномы Эрмита.
   3) Сферические и шаровые функции.
   4) Простейшие задачи для уравнения Шредингера.
5. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Гармонические функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формулы Грина. Основные свойства гармонических функций (теорема Гаусса, теорема о среднем, бесконечная дифференцируемость, принцип максимума). Теоремы единственности для внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа. Функция Грина для оператора Лапласа. Гармонические потенциалы. Свойства потенциалов простого и двойного слоя. Метод интегральных уравнений для решения краевых задач. Существование решений основных краевых задач для уравнения Лапласа.
6. Уравнение параболического типа. Внутренние начально-краевые задачи. Принцип максимума. Теоремы единственности. Теорема существования для одномерного случая. Уравнение теплопроводности на бесконечной прямой и в неограниченном пространстве. Теорема единственности. Теорема существования. Фундаментальное решение. Уравнение теплопроводности на полубесконечной прямой. Метод продолжения. Функция Грина. Неоднородные граничные условия.
7. Уравнение гиперболического типа. Внутренние начально-краевые задачи. Теоремы единственности. Теорема существования в одномерном случае. Уравнение колебаний на бесконечной прямой. Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера. Уравнение колебаний на полубесконечной прямой. Метод продолжения. Метод интегральных преобразований Фурье. Задача Коши для уравнения колебаний в пространстве. Формула Пуассона. Метод спуска.
8. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца. Задача Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа. Свойства собственных значений и собственных функций. Собственные функции оператора Лапласа для простейших канонических областей. Фундаментальные решения для уравнения Гельмгольца. Теоремы единственности для уравнения Гельмгольца в ограниченной области.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М: Изд-во МГУ, 1993.
2. *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физике. М: Изд-во МГУ, 1998.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М: Изд-во МГУ, 1999.
4. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М: «Наука», 1984.
5. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М: «Физматлит», 2003.


## Необходимый минимум по курсу ММФ (2004\2005 уч.г.)

1. Канонический вид уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов.
2. Постановка начально-краевых задач.
3. Общая схема метода разделения переменных.
4. Постановка задачи на собственные значения.
5. Уравнение Бесселя и его общее решение.
6. Определение классических ортогональных полиномов.
7. Определение присоединенных функций Лежандра, сферических функций, шаровых функций.
8. Определение гармонической функции. Принцип максимума для гармонических функций.
9. Метод функций Грина решения краевых задач.
10. Метод сведения краевых задач к интегральным уравнениям.
11. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
12. Фундаментальное решение для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
13. Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера.
14. Уравнение теплопроводности и колебаний на полупрямой. Принцип продолжения начальных условий.
15. Уравнение Гельмгольца. Фундаментальные решения на плоскости и в пространстве.

## ПЛАН СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО МЕТОДАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НА 2004\2005 УЧЕБНЫЙ ГОД (ОСЕННИЙ СЕМЕСТР)

1. Вывод уравнений. Постановка краевых задач.
2. Задача Штурма-Лиувилля (отрезок, прямоугольник, параллелепипед).
   Контрольная работа.
3. Уравнение Лапласа в прямоугольнике и параллелепипеде.
4. Уравнение Лапласа в круге, вне круга, в кольце, в секторе.
   Контрольная работа.
5. Уравнение Бесселя. Общее решение. Рекуррентные формулы. Функции полуцелого порядка. Вычисление определителя Вронского.
   Вычисление квадрата нормы.
6. Задача Штурма-Лиувилля (круг, сектор, кольцо).
7. Задача Штурма-Лиувилля (цилиндр и его части).
   Контрольная работа.
8. Уравнение Лапласа в цилиндре и его частях.
9. Уравнение Лапласа внутри и вне шара, в шаровом слое.
10. Задача Штурма-Лиувилля (шар, шаровой слой).
    Контрольная работа.
11. Уравнения теплопроводности и колебаний в ограниченной области (однородные граничные условия).
    Контрольная работа.
12. Уравнения теплопроводности и колебаний в ограниченной области (неоднородные граничные условия).

13. Уравнение теплопроводности на бесконечной прямой, в неограниченном пространстве, на полубесконечной прямой.
14. Уравнение Гельмгольца в круге, в шаре, в шаровом слое. Контрольная работа.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов. Задачи по математической физике. Под редакцией А.Г.Свешникова. М: Изд-во Московского ун-та, 1998.
2. Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов. Сборник задач по математической физике. М: «Физматлит», 2003.


Методы математической физики (2004-2005 уч.г.)

Билет 1 (ММФ 2004\05)

1. Принцип максимума для гармонической функции (сформулируйте и докажите).
2. Напишите формулу Даламбера. Решение какой задачи выражает эта формула?
3. Дайте классификацию дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в случае двух переменных.
4. Как связаны функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$? Ответ обоснуйте.
5. Как ставится общая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности?

Билет 2 (ММФ 2004\05)

1. Теорема о нулях классических ортогональных полиномов (сформулируйте и докажите).
2. Дайте определение и сформулируйте основные свойства потенциала двойного слоя.
3. Напишите фундаментальное решение для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
4. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лагерра.
5. Напишите каноническую форму уравнения гиперболического типа.

Билет 3 (ММФ 2004\05)

1. Теорема единственности решения уравнения теплопроводности на бесконечной прямой (сформулируйте и докажите).
2. Сформулируйте определение классических ортогональных полиномов.
3. Напишите функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхнем полупространстве. Каким методом ее можно построить?
4. Применение принципа отражения для построения решения задачи Дирихле для уравнения колебаний на положительной полупрямой (постройте решение задачи).
5. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Эрмита.

Билет 4 (ММФ 2004\05)

1. Теорема существования классического решения уравнения теплопроводности на отрезке (сформулируйте и докажите).
2. Какие пары цилиндрических функций могут образовывать фундаментальную систему решений уравнения Бесселя?
3. Дайте определение поверхности Ляпунова.

4. Проиллюстрируйте на фазовой плоскости процесс распространения локального начального возмущения бесконечной струны. Начальная скорость струны равна нулю.
5. Покажите, что система полиномов Лежандра исчерпывает все собственные функции соответствующей задачи на собственные значения.

Билет 5 (ММФ 2004\05)

1. Принцип максимума для уравнения параболического типа (сформулируйте и докажите).
2. Являются ли шаровые функции собственными функциями задачи на собственные значения?
3. Теорема об устойчивости решения уравнения гиперболического типа на бесконечной прямой по начальным функциям и правой части (сформулируйте).
4. Напишите формулу для разрыва нормальной производной потенциала простого слоя.
5. Дайте классификацию дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в случае многих переменных.

Билет 6 (ММФ 2004\05)

1. Докажите замкнутость системы присоединенных функций Лежандра.
2. Покажите, что функция Ханкеля не может иметь вещественных нулей.
3. Используя функцию Грина, запишите общее решение начально-краевой задачи для неоднородного уравнения колебаний в ограниченной области с неоднородными начальными и однородным граничным условием третьего рода.
4. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов.
5. Напишите уравнение теплопроводности и уравнение колебаний. Справедлив ли для этих уравнений принцип максимума?

Билет 7 (ММФ 2004\05)

1. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя (сформулируйте и докажите).
2. Напишите асимптотику функции Бесселя при больших значениях аргумента.
3. Сформулируйте принцип сравнения для уравнения параболического типа.
4. Напишите формулу для решения неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой при однородных начальных условиях.
5. Поставьте начально-краевую задачу, моделирующую процесс малых поперечных колебаний однородной свободной струны с закрепленными концами.

Билет 8 (ММФ 2004\05)

1. Теорема о существовании потенциала двойного слоя (сформулируйте и докажите).

2. Напишите асимптотику функции Ханкеля при больших значениях аргумента.
3. Сформулируйте принцип сравнения для гармонических функций.
4. В чем состоит метод спуска Адамара?
5. Поставьте общую краевую задачу для уравнения эллиптического типа.

Билет 9 (ММФ 2004\05)

1. Теорема о разрыве нормальных производных потенциала простого слоя (сформулируйте и докажите).
2. В чем состоит метод распространяющихся волн? Приведите пример.
3. Решением какого уравнения является функция Инфельда?
4. Какой физический смысл имеет функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа?
5. Напишите общий вид решения начальной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородным начальным условием на бесконечной прямой.

Билет 10 (ММФ 2004\05)

1. Теорема о разрыве потенциала двойного слоя (сформулируйте и докажите).
2. Какие условия ставятся на бесконечности при постановке внешней краевой задачи для уравнения Лапласа в трехмерном случае? Что они обеспечивают? Приведите пример.
3. Решением какого уравнения является функция Макдональда?
4. В чем состоит парадокс бесконечной теплопроводности? Как его можно объяснить?
5. В чем состоит метод сведения краевых задач к интегральным уравнениям? Приведите пример.

Билет 11 (ММФ 2004\05)

1. Докажите свойство симметрии функции Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
2. Поставьте общую краевую задачу для классических ортогональных полиномов.
3. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в трехмерном и двумерном случаях.
4. Напишите функцию Грина задачи Дирихле для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой. Каков ее физический смысл?
5. Что такое метод интегрирования по фазовой плоскости? Приведите пример.

Билет 12 (ММФ 2004\05)

1 Уравнение специальных функций и свойства его решений (сформулируйте и докажите леммы о поведении решений в особой точке).
2. Дайте определение функции Грина задачи Неймана для оператора Лапласа.
3. Сформулируйте принцип максимума для уравнения параболического типа.
4. Поставьте внешнюю краевую задачу для уравнения Лапласа в двумерном случае.
5. Дайте определение сферической функции.

Билет 13 (ММФ 2004\05)

1. Существование решений внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана (сформулируйте и докажите теоремы существования).
2. Напишите уравнение Бесселя. Какие функции образуют его фундаментальную систему решений?
3. Дайте определение гармонической функции. Приведите пример.
4. Приведите пример применения метода электростатических изображений.
5. Напишите собственные функции круга (граничные условия Дирихле).

Билет 14 (ММФ 2004\05)

1. Существование решений внутренней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле (сформулируйте и докажите теоремы существования).
2. Дайте определение полиномов Лежандра. Частным случаем полиномов какого типа они являются?
3. Напишите первую формулу Грина. Какие условия накладываются на входящие в нее функции?
4. Напишите формулу для решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
5. Дайте определение фундаментального решения уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Билет 15 (ММФ 2004\05)

1. Теорема единственности решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа в трехмерном случае (сформулируйте и докажите).
2. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Какие особые точки имеет уравнение этой задачи?
3. Поставьте общую начально-краевую задачу для уравнения гиперболического типа.
4. Напишите определители Вронского для функций Бесселя и Ханкеля.
5. Напишите общий вид решения краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с однородным начальным условием и неоднородным граничным условием.

Билет 16 (ММФ 2004\05)

1. Теорема единственности решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа в двумерном случае (сформулируйте и докажите).
2. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Какие его решения вы знаете?
3. Приведите общую схему метода разделения переменных.
4. В каком случае применимы формулы Грина в случае внешней области?
5. Напишите канонический вид уравнения эллиптического типа.

Билет 17 (ММФ 2004\05)

1 Функция Бесселя (получите представление в виде обобщенного степенного ряда).
2. Сформулируйте принцип максимума для уравнения параболического типа.
3. Напишите обобщенную формулу Родрига для классических ортогональных полиномов.
4. Напишите общий вид решения краевой задачи для однородного уравнения колебаний на полубесконечной прямой с однородными начальными условиям и неоднородным граничным условием.
5. Напишите третью формулу Грина для оператора Гельмгольца.

Билет 18 (ММФ 2004\05)

1. Интегральное представление функции Бесселя (выведите формулу).
2. Дайте определение фундаментального решения уравнения Гельмгольца в трехмерном случае.
3. Какой функцией определяется радиальная зависимость собственной функции шара?
4. Сформулируйте теорему существования классического решения однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
5. Функция Грина задачи Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой (приведите формулу).

Билет 19 (ММФ 2004\05)

1. Функция Ханкеля первого и второго рода (получите интегральное представление).
2. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями третьего рода.
3. Сформулируйте теорему об устойчивости решения уравнения колебаний на бесконечной прямой.
4. Принцип продолжения для построения решения уравнения параболического типа на полупрямой в случае граничных условий Дирихле и Неймана (сформулируйте и обоснуйте).
5. Напишите канонический вид уравнения гиперболического типа.

Билет 20 (ММФ 2004\05)

1. Асимптотика цилиндрических функций при большом значении аргумента (получите асимптотическую формулу).
2. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре методом электростатических изображений.
3. Фазовая плоскость, характеристический треугольник (дать определения, приведите примеры).
4. Дайте определение полиномов Якоби.
5. Как связаны функции Бесселя, Неймана и Ханкеля?

Билет 21 (2004\05)

1. Производящая функция классических ортогональных полиномов (выведите общую формулу).
2. Разрыв потенциала двойного слоя (напишите формулу).
3. Теорема единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Гельмгольца (сформулируйте).
4. Дайте определение функции Неймана.
5. Свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности на бесконечной прямой (перечислите).

Билет 22 (ММФ 2004\05)

1. Линейная независимость цилиндрических функций (получите выражения для определителей Вронского).
2. Напишите формулу Даламбера. Какими способами ее можно получить?
3. Поставьте краевую задачу для полиномов Лежандра. Какие особые точки имеет уравнение этой задачи?
4. Какой физический смысл имеет функция Грина внутренней краевой задачи для уравнения теплопроводности? Ответ обоснуйте.
5. Дайте определение функции Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.

Билет 23 (ММФ 2004\05)

1. Выведите формулу Пуассона, описывающую процесс распространения колебаний в трехмерном пространстве.
2. Дайте определение гармонической функции.
3. Напишите уравнение Бесселя.
4. Как ставится внешняя задача Дирихле для оператора Лапласа в трехмерном случае?
5. Дайте определение фундаментального решения уравнения Гельмгольца в двумерном случае.

Билет 24 (ММФ 2004\05)

1. С помощью метода спуска Адамара получите формулу Пуассона, описывающую процесс распространения колебаний в двумерном пространстве.
2. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов.
3. Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.
4. Напишите собственные функции круга.
5. Покажите, что все нули уравнения Бесселя, кроме нуля $x=0$, простые.

Билет 25 (ММФ 2004\05)

1. Выведите уравнение для присоединенных функций Лежандра.
2. Сформулируйте теорему Стеклова.
3. Докажите теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

4. Какой физический смысл имеет фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой?
5. Напишите уравнение малых поперечных колебаний мембраны.

Необходимым условием для получения на экзамене оценки «отлично» является правильный ответ на первый вопрос билета.

Начало экзаменов в **9.00**. Первая половина группы приходит к **9** часам, вторая половина группы приходит к **10** часам.

# М.М.Ф.

| | ① | ② | 3 | 4 | ⑤ | ⑥ | 7 | 8 | ⑨ | 10 | ⑪ | ⑫ | ⑬ | ⑭ | ⑮ | ⑯ | 17 | ⑱ | ⑲ | 20 | 21 | ㉒ | 23 | 24 | 25 | ← Билет |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | X | | | 1/2 | $\div$ | | | 1/2 | 1/2 | X | 1/2 | 1/2 | 1/2 | | 1/2 | | X | 1/2 | | | X | | | | |
| 2 | X | X | | | | X | | | | X | X | X | X | X | X | X | | | | | X | X | | | | |
| 3 | X | X | | | $\div$ | $\div$ | | | X | X | X | X | X | X | X | X | | X | X | | | X | | | | |
| 4 | X | X | | | X | X | | | X | X | X | X | X | X | X | X | | X | | X | X | X | | | | |
| 5 | X | X | | | X | X | | | | X | | X | X | X | X | X | | X | X | X | X | X | | | | |

↑ вопрос

**Билет 1.**

① Принцип max для гарм. ф-ии: Гарм-я в обл. D ф-я $u(M)$, непрерывная в $\bar{D}$, достигает своих max и min значений на границе S области D. Док-во: т. о среднем: для гарм ф-ии $u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\oint_{(M_0,\rho)} u(M)dS \Rightarrow$ $u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\oint u(M)ds \leq \frac{1}{4\pi\rho^2}\oint u(M_0)ds = u(M_0) \Rightarrow u(M) \equiv u(M_0) \Rightarrow$ возьмём $M_0$ на границе $\Rightarrow$ тогда верно ($\rho=0$), (точнее $\rho\to0$).

② Рассм зад. Коши для беcогр. ур. колебаний: $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \ (x,t)\in\Omega \ (\Omega = R\times(0,\infty)) \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ x\in R^1 \end{cases}$ (неогр. прямая)

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$ ← ф-ла Даламбера.

③ $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$ $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ – гиперб.; $<0$ – элл.; $=0$ параб.

④ $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ $\nu$: если целое, то сумм. от n: $J_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty}\ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\ldots = (-1)^n J_n(x)$ заменим индекс k: $k=n+p$.

⑤ $\rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u) + F(M,t)$ $u(M,0)=\varphi(M)$ $\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t)$, $P\in S$

$\alpha+\beta>0$ $\alpha\geq0$ $\beta\geq0$ $t\in[0,+\infty)$

**Билет 2**

① Теорема о нулях: классический ортогональный полином $p_n(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ ровно n простых нулей. Док-во: из орт. $p_n(x)$ и $p_0(x)\equiv1$: (определение ортогональности $\int_a^b p_n(x)p_k(x)\rho(x)dx = 0$, $n\neq k$)

$\int^b p_n(x)\cdot 1\cdot\rho(x)dx = 0 \Rightarrow p_n(x)$ меняет знак на $[a,b]$, причем $k\geq1$ раз, а то $p_n(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_k)\varphi_n(x)$ Пусть $k<n$, тогда можно разложить

$r_k(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_k) = \sum_{i=0}^{k}a_ip_i(x)$ (т.к. $k<n$) ($x_i\neq x_j$ при $i\neq j$) $\Rightarrow \int_a^b p_n(x)r_k(x)\rho(x)dx =$

$= \sum_{i=0}^{k}a_i\int_a^b p_n(x)p_i(x)\rho(x)dx = 0$. С другой стороны: $= \int_a^b r_k^2(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx \neq 0$

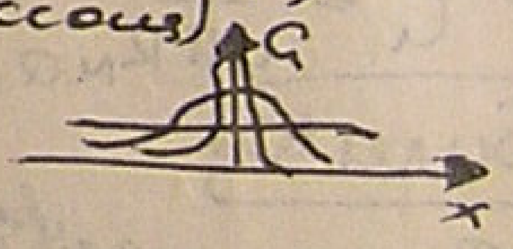
то $k\geq n$, но полином не может иметь $>n$ корней $\Rightarrow k=n$ (все корни простые).

② Потенциалом двойного слоя в пространстве (3D) наз. интеграл вида $W(M) = -\int_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}dS_P$

$\nu(P)$ – ф-ия, заданная на поверхности S (в 2D $\ln\frac{1}{R_{MP}}$) Св-ва: $\Delta W = 0$ $W = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$, $r\to\infty$ в 2D $W = O\left(\frac{1}{r}\right)$

③ $u_t = a^2u_{xx}$, $u(x,0) = \varphi(x)$ $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Rightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$ (интеграл Пуассона)

$u_t = a^2u_{xx} + f(x,t)$ $u(x,0) = 0 \Rightarrow G(\ldots t-\tau\ldots) \Rightarrow$ $u = \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)d\xi d\tau$




④ $\sigma(x) = \begin{cases}(x-a)(x-b) & \neq \ \neq \\ (x-a) & \neq \ = \\ (x-b) & = \ \neq \\ 1 & = \ = \end{cases}$ пусть $a=0$ $b=\infty$: $\sigma(x) = x$

$\tau(x) = Ax+B$ $\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)}\exp\left(\int\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx\right) = \frac{1}{x}\exp\left\{\int\left(A+\frac{B}{x}\right)dx\right\}$

$\rho(x) = x^\alpha e^{Ax}$, $\alpha = B-1$ пусть $A=-1 \Rightarrow \rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ $(\alpha>-1)$

условие: $x^m\sigma(x)\rho(x) = 0$ $m=0,1\ldots$ с таким весом полиномы Лагерра

задача: найти $\lambda$, чтобы были нетривиальные непрерывные квадр. инт-е решения $\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda x^\alpha e^{-x}y = 0$, $(0<x<\infty)$

⑤ $\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F}(\xi,\eta,u,u_\eta,u_\xi) = 0$ $\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \Rightarrow$

$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0$ $\lambda_{1,2} = \frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}} \Rightarrow (z_x - \lambda_1z_y)(z_x-\lambda_2z_y) = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda_1$, $\frac{dy}{dx} = \lambda_2 \Rightarrow \xi(x,y) = C_1$; $\eta(x,y) = C_2$ то $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} + \bar{F} = 0$

каноническая форма уравнения гиперболич. типа.

Билет 5

сформулировать и доказать.

① Принцип max для у-я параб типа: решение неоднородного ур-я теплопр-ти $\rho u_t = \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u)$ не может принимать во внутр. точках цилиндра $\overline{Q}_T$ значения, больше максимального из нач и гр значений.

[redacted] нет док

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 + 2\pi\mu(P)$$

④ Потенциал простого слоя: $V(M) = \int_S \mu(P) \frac{dS_P}{R_{MP}}$ на плоскости

без двоек $\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - 2\pi\mu(P)$

⑤ Рассм. ур-е, линейное относительно старших производных:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F = 0$$ Пусть $M_0(x_1^0 \ldots x_n^0) \in D$ Построим кв. форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0 \ldots x_n^0) t_i t_j \Rightarrow$$ невырожд. лин-е преобраз.

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} t_j \qquad \sum_{i=1}^{\tilde n} \lambda_i s_i^2$$ канонич. вид.

число положительных, отрицательных и равных нулю членов постоянно (не завис. от лин. преобр.) это

1) все $\lambda_i$ одного знака → эллипт

2) $>0$ и $<0$, но $\neq 0$ → гип.

3) $\exists\ \lambda_i = 0$ → параб.

Билет 6

② $W[J_0(x), N_0(x)] = \frac{2}{\pi x}$, то $H_0^{(1)} = J_0 + iN_0$ не имеет вещ. нулей (т.к. $J_0 \neq 0$, $N_0 \neq 0$ одновр.)

④ Производящей функцией классических ортогональных полиномов называют функцию $\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_n(x)}{n!} z^n$ (ряд Тейлора), где $\tilde{P}_n(z) = \frac{1}{C_n} P_n(x)$

⑤ принцип максимума

теплопроводности

Да $\rho(M) u_t = \mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\,u) + f(M,t)$

колебаний

Нет $\rho(M) u_{tt} - \mathrm{div}(k(M)\,\mathrm{grad}\,u) + q(M) u = f(M,t)$

Билет 9

① Нормальные производные потенциала простого слоя терпят разрыв на S: нет док

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 + 2\pi\mu(P), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^0 - 2\pi\mu(P)$$

Доказ-во: через ..: $\frac{\partial V}{\partial n_e}(M) = J(M) + W(M)$

нет разрыв

③ $y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$ – уравнение, решением которого является функция Макдональда.

④ $G = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + v$: потенциал точечного заряда в присутствии заземленной проводящей поверхности S

Билет 10

① Потенциал двойного слоя претерпевает разрыв при переходе через поверхность

нет док

② Условия на бесконечности при постановке внешн. краевой задачи для у-я Лапласа в трехм. случае: функция должна быть регулярной на ∞ (иначе реш. не ед.: [redacted] $\Delta v = 0$, $v|_S = 0$ и $|v| < \varepsilon$ при $r \geq R_0$)

$v = u_1 - u_2$ ⟶ $\Sigma_R$

③ уравнение, реш. кот. явл ф-я Макдональда

в ур. Бес. вместо $x$ $ix$:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \qquad y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

фунд. система $I_0(x)$ и $K_0(x)$: $y(x) = I_0(x)\cdot C_1 + C_2 K_0(x)$

④ парадокс бесконечной теплопр

в сколь угодно близкие к $t=0$ моменты T отлична от 0 вдалеке (несовершенство физической модели)

⑤ Через потенциалы слоев сводим к интегр-м уравнениям и по т. Фредгольма смотрим разрешимость и т.д.

нет примера

# М.М.Ф.

## Билет 11.

① Функция Грина симметрична: $G(M,Q)=G(Q,M)$ Доказательство: $u(M)=G(M,M_2)$ $v(M)=G(M,M_1)$ окружим точку $M_1$ и $M_2$ сф. $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ дост. малого рад.
Прим. II ф-лу Грина: $\oint_{\Sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds+\oint_{\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=0$

$$v(M_1)=-\oint_{\Sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds;\ u(M_2)=-\oint_{\Sigma_2}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds;\ -v(M_1)+u(M_2)=0$$

$G(M_1M_2)=G(M_2M_1)$

② общая краевая задача для классических ортогональных полиномов

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left\{\sigma\rho\frac{dy}{dx}\right\}+\lambda\rho y=0 & x\in(a,b)\\ |y(a)|<\infty\ ; & |y(b)|<\infty\end{cases}$$

кл. орт. полиномы явл-ся собств ф-ми з. Ш-Л.

③ Функция двух переменных $u(x,y)$ наз регулярной на $\infty$, если она имеет конечный передел на $\infty$.
Ф-ия $u(M)$ трех переменных $\{M=(x,y,z)\}$ назыв. регулярной на $\infty$, если при достаточно большом $r\geq r_0$: $|u|\leq\frac{A}{r}$; $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\leq\frac{A}{r^2}$; $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\leq\frac{A}{r^2}$; $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\leq\frac{A}{r^2}$

④ $G_1(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)-G(x,-\xi,t)=$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}$$

$G_1(x,\xi,t)$ дает значение темпер. в точке $x$ полубеск. стержня в момент $t>0$, если в начальный момент $t=0$ в точке $x=\xi>0$ мгновенно выделилось кол-во тепла $=\rho=c\rho$, а граничное сечение $x=0$ все время поддерж. при нулевой температуре, для чего в точке $x=-\xi$ нужно поместить мгнов. точеч. отрицат. ист-к.

$$u(x,t)=\int_0^\infty G(x,\varphi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

## Билет 12

① $Lu(x)=0$ $x\in(a,b)$

$Lu=\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u$

пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – 2 лин. незав. реш. ур-ия (1), $k(x)$ кот. удовл.
а) $k(x)>0$ $x\in(a,b)$ б) $k(x)=(x-a)\varphi(x)$ $\varphi(x)$ – непр. на $[a,b]$ $\varphi(a)\neq0$
Тогда, если $u_1(x)$ – огранич. реш., имеющее конеч. предел в т. $x=a$, то второе решение $u_2(x)$ при $x=a$ явл. неогранич. Причем если $u_1(a)\neq0$, то $u_2(x)$ имеет в т. $x=a$ логарифм. особенность, а если $u_1(x)$ имеет в т. $x=a$ нуль $\nu$-го порядка, то $u_2(x)$ имеет при $x=a$ полюс $\nu$-го порядка.

② $\Delta u=-F$; $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=f$ Функция $G(M,Q)$ называется функцией Грина внутр. задачи Неймана для оператора Лапласа, если 1) $G(M,Q)=\frac{1}{4\pi R_{MQ}}+v$ $v$ – гармонич в $D$ ф-ия. 2) $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S=-\frac{1}{S_0}$, $S_0$ – площадь пов. $S$.

③ Принцип максимума для уравнения параболического типа
Пусть ф-я $u(M,t)$ непрер. в замкн. цилиндре $\overline{Q_T}=\{M\in\overline{D},\ 0\leq t\leq T\}$ и удовл. в откр. цилиндре $Q_T$ одн. ур-ю: $\rho u_t=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)-qu$
$\rho(M),k(M)>0$, а $q(M)\geq0$ Тогда ф-я $u(M,t)$ может дост. своих max и min значения только либо при $t=0$ либо на пов-ти $S$ грани-цы $\overline{D}$. Решение однородного ур-я теплопр-ти $\rho u_t=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)$, непрерыв. в замкн. цил-ре $\overline{Q_T}=\overline{D}\times[0,T]$ не может во внутр. точках принимать значения, большие максимальных из нач и гр. условий

④ Найти функцию $u$, непрерывную в $D_e\cup\Gamma$, удовл. в $D_e$ ур-ю $\Delta u=0$ и гр. усл $u|_\Gamma=f$ ← Дирихле (н.т.д) $|u|\leq N$, $N=\mathrm{const}$ (! решение однозначно регулярно на $\infty$.

⑤ Сферическая функция: Ограниченное на единич. сфере решения уравнения $\Delta_{\theta\varphi}Y+\lambda Y=0$ $0<\theta<\pi$, $0\leq\varphi\leq2\pi$ удовл. условию периодичности по $\varphi$ и облад непрер. производными до 2-го порядка, наз. сферич. ф-ями.
3. Ш.-Л. на ед. сфере

$$\begin{cases}\Delta_{\theta\varphi}Y+\lambda Y=0 & 0<\theta<\pi\\ Y(\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi+2\pi) & 0\leq\varphi<2\pi\\ |Y(0,\varphi)|<\infty\\ |Y(\pi,\varphi)|<\infty\end{cases}\qquad Y_n^{(m)}(\theta\varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi$$

Билет 13.

① Внутр. задача Д. и внеш. зад. Неймана имеют кл. реш. при любой непр. ф-ии $f$.

Сущ. реш. внутр. з. Дирихле $\Delta u = 0$ в $D$ $u|_S = f$ $f(P)$ непр. на $S$ (Т:) внутр. задача Дирихле имеет классич. реш. при $\forall$ непр. ф-ии $f$

Сущ. реш. внеш. з. Неймана: $\Delta u = 0$ в $D_e$ $\frac{\partial u}{\partial n_e}\Big|_S = 0$ $u \rightrightarrows 0$ в $\infty$ (Т:) Внеш. задача Н. имеет клас. реш. при $\forall$ непр. ф-ии $f$. $\left(\lim\limits_{M \to P_0 \in S} \frac{\partial u}{\partial n_e}(M) = f(P_0),\ P_0 \in S\right)$

② Ур-ие Бесселя: $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ пары линейно независ. цил. функций образуют ФСР ур. Б. попарно $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ при $\forall\ \nu$ и $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ при нецел. $\nu$.

③ Ф-ия $u(M)$, непрерывная в обл. $D$ вместе со своими производными до второго порядка и удовл. в этой обл-ти ур-ю Лапласа наз. гармонической в обл. $D$. Пример: ф-я для реш. $\Delta u = 0$ в круге

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)$$

④ Метод электростатических изображений:

Пример: Построение ф-ии Грина для полупростр-ва $(-\infty < x, y < \infty, z \geq 0)$

$\Delta V = 0$ при $z > 0$ $V|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\Big|_{z=0}$ $M = (x, y, z)$ $V \rightrightarrows 0$

пусть $M_1$ - точка, симметр. т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ отн-но пл. $z = 0$.

Тогда решением задачи явл. ф-я $V = -\frac{1}{4\pi R_{MM_1}}$ - гармонич. ф-я в $D_e$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}}$$

⑤ собственные ф-ии круга (граничные условия Дирихле)

$$R(r) = R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda} r)$$

З. Ш.-Л. для круга $K_a$:

$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & (x,y) \in K_a \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u|_C = 0 & u \not\equiv 0 \end{cases}$ $\alpha = 0$ для гр. усл. Дирихле.

Опр. Лапл. в пол. сист. коорд.

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

1) $\begin{cases}\Phi'' + \nu\Phi = 0 & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \Phi(\varphi) \equiv \Phi(\varphi + 2\pi)\end{cases}$

$\Phi(\varphi) = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{cases}$

$\nu = \nu_n = n^2$, $n = 0, 1, \ldots$

2) $\begin{cases} r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + (\lambda r^2 - n^2)R = 0 & 0 < r < a \\ R|_{r=a} = 0 \\ |R(0)| < \infty \end{cases}$

$x = r\sqrt{\lambda}$

$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2)y = 0$

$R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r)$

$J_n(\underbrace{\sqrt{\lambda} a}_{\mu_k^{(n)}}) = 0$ - ур. для $\lambda$

$\lambda = \lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2$

соб. ф. круга

$$u_{kn}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\, r\right)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{Bmatrix} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Билет 14.

① Существование решений внутр. з. Неймана и внеш. задач. Дирихле

(1) $\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{в } D \\ \frac{\partial u}{\partial n_e}\Big|_S = f(P) & P \in S\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{в } D_e \\ u|_S = f \\ u \text{ - регулярна на } \infty\end{cases}$

Решение з. будем искать в виде: (1): $u(M) = \oint\limits_S \mu(P)\frac{dS_P}{R_{MP}}$

(2): $u(M) = -\oint \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}\,dS_P + \frac{\alpha}{R_{MO}}$ ($R_{MO}$ - расст. от точки $M$ до некот. фикс. точки $O$, располож. в обл. $D$).

(Т:) Внешняя задача Дирихле и внутр. задача Неймана имеет классич. решение при люб. непр. ф-ии $f$, удовл. усл. (Нейман:) $\oint\limits_S f(P)\,dS = 0$ (Дирихле:) $u|_S = f$.

② Классич. ортогон. полин., задан. на отр. $[-1; 1]$ и ортогональные на нём с весом $\rho(x) \equiv 1$ наз. полиномами Лежандра. П. Лежандра - част. случай полиномов Якоби при $\alpha = \beta = 0$ ($\rho(x) = (1-x)^\alpha(x+1)^\beta$) Якоби: $a = -1$, $b = 1$ $\sigma(x) = (x+1)(-x+1) = 1 - x^2$

$\rho(x) = \frac{1}{1-x^2}\exp\left\{\int\frac{Ax+B}{1-x^2}dx\right\} \Rightarrow$ ф-ла Родрига $P_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\{\sigma^n(x)\rho(x)\}$

$C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \Rightarrow P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}$ $\lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1)$

Леж: $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$, $\lambda_n = n(n+1)$

③ Пусть в $D$ заданы ф-ии $u$ и $v$, непрерывные вместе с первыми производными в $\bar{D}$ и имеющие непр. вторые произв. в $D$

$\int\limits_D vLu\,dV = \oint\limits_S kv\frac{\partial u}{\partial n}dS - \int\limits_D\{k\nabla u \nabla v + quv\}dV$, $|Lu = \mathrm{div}\{k\,\mathrm{grad}\,u\} - qu|$ $k, q$ непр. в $\bar{D}$, $k$ непр. диф. в $D$

④ Для случая $Lu \equiv \Delta u$ первая ф-ла Грина: $\int\limits_D v\Delta u\,dV = \oint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \int\limits_D \nabla u \nabla v\,dV$

Решение з. Коши для у-я колеб. на прямой $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ $(x,t) \in \Omega$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u_t(x,0) = \psi(x)$ $x \in R^2$

$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz$

⑤ Введем сф. сист. коорд. $(r, \theta, \varphi)$ и разб.-сим. часть оп. Лапласа $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0$ $u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$ где $r = R_{MM_0}$, $M_0 \in D$ $v(M, M_0) = \frac{1}{R_{MM_0}}$ - фунд. реш. ур. Л. в 3D

# М.М.Ф.

**Билет 15.**

② на отр $[-1;1]$: $-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(m)}\right] + \left(\lambda_n - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_n^{(m)} = 0 \quad |P_n^{(m)}(\pm 1)| < \infty$ (т.е. огр) где $\lambda_n = n(n+1)$

③ $$\begin{cases} \rho u_{tt} = div(grad\, u) - qu + f \\ u(M,0) = \varphi(M), \; u_t(M,0) = \psi(M) \\ \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t), \; P \in S \end{cases} \qquad (M,t) \in Q_\infty \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0$$

④ $W[J_\nu, H_\nu^{(1)}] = \frac{2i}{\pi x}$

⑤ Неоднор. гр. усл. Дирихле $u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau$

**Билет 16.**

① Внешняя задача Дирихле на плоскости не может иметь более одного кл-го решения, регул-го на $\infty$

② $y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad y(x) = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x)$

③ Метод разд-я пер-х: строим решение нач. кр. задачи в виде ряда по нек-ой ортон-й системе ф-ий. Идея: $u(M,t) = \vartheta(M)T(t)$ $\rho P_t[u] = Lu$ $\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ => $\rho\vartheta P_t[T] = TL\vartheta$ => делим

④ $G(M,Q)$ регулярна на $\infty$-ти

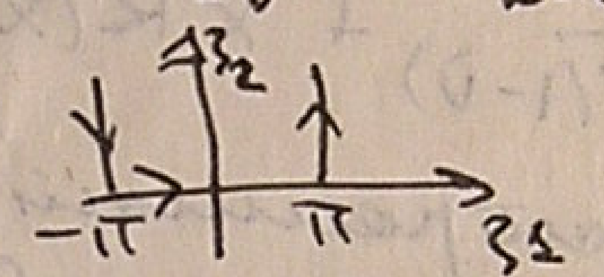
⑤ $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad [u(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))]$

**Билет 18.**

① $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \quad \Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z}-1}\int_\gamma e^{-t}t^{z-1}dt$; => $\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi}\int e^{-t}t^{-z-1}dt$; $z = k+\nu$

$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{e^{i\pi(k+\nu)}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}t^{-k-\nu-1}dt \quad J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_\gamma e^{-t}\left(\frac{x}{2t}\right)^\nu$

$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{C^+} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi} d\xi$



③ $\Delta u = 0$

$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \qquad \frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R(r)} \equiv -\frac{\Delta_{\theta\varphi}Y}{Y(\theta,\varphi)} \Rightarrow \Delta_{\theta\varphi} = -n(n+1)$

$\sigma(\sigma+1) - n(n+1) = 0 \qquad u: r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$

$R(r) = r^\sigma$

$u_{nm} = \begin{cases} r^n Y_n^{(m)} \\ r^{-(n+1)} Y_n^{(m)} \end{cases}$

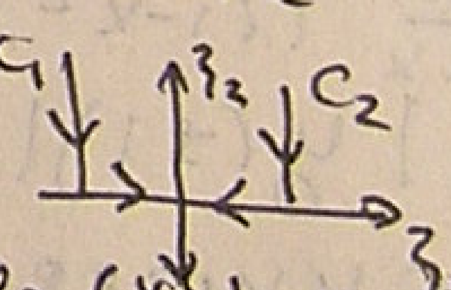
④ $\varphi(x)$ дважды непр диф

$\psi(x)$ — непр диф => сущ, ед-но, решение по Даламберу

⑤ $u(x,t) = \int_0^\infty G_2(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \quad G_2 = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)$

**Билет 19.**

① $H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi} d\xi \quad H_0^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi} d\xi$



③ $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ пусть $\varphi_s(x), \psi_s(x)$, $s = 1,2$ удовл. усл $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \varepsilon$

$\int_a^b |\psi_1(z) - \psi_2(z)|^2 dz \le \varepsilon^2(b-a)^2 \quad \forall b, a = const$

⑤ $\bar{a}_{11} = 0$ $\quad |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon(1+T), \; t \in [0,T]$

$\bar{a}_{22} = 0 \quad \alpha = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \beta = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \qquad u_{\xi\eta} = \bar{F}$ или $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \bar{F}$

**Билет 20.**

④ $a = -1, b = 1 \Rightarrow \sigma = 1 - x^2 \quad \rho(x) = \frac{1}{1-x^2}\exp\left(\int\frac{Ax+B}{1-x^2}dx\right)$; $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha = -\frac{B+A}{2} - 1$, $\beta = \frac{B-A}{2} - 1$

⑤ $J_\nu(x) = \frac{1}{2}(H - H)$

$J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2}(H^1 e^{i\nu\pi} + H^2 e^{-i\nu\pi}) \qquad N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right)$

$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$

$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$

Билет 21.

2. $W(M) = \int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} d S_P$ $\quad W_i(M) \xrightarrow[\text{(P}\in S)]{\text{п.н на пов-ти}} W(M) + 2\pi \nu(P)$

$W_e(M) = W(M) - 2a \nu(P)$

4. $N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right)$

5. $G(x,\xi,t)$ – фунд реш.
1) опр-на при $t>0$, полна
2) удовл. $G_t = a^2 G_{xx}$
3) с физич.т. зр. $G$ – это $T$ в $x$, в момент $t$.

Билет 22.

1. Для док-ва линейной независимости цил-ких ф-ций достаточно показать, что опр-ль Вронского отличен от нуля. Проведем док-во для ф-ии Ханкеля первого рода

$W[J_\nu, H_\nu^{(1)}] = -\frac{i}{\sin \pi\nu} W[J_\nu, J_{-\nu}]$

$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{x^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)}\right) =$

$= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + x^2 p(x)\right)$, аналогично получим $J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} + x^2 Q(x)\right)$

$J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\nu (2x p(x) + x^2 p'(x))$

$J_{-\nu}'(x) = -\frac{\nu}{x} J_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}(2x Q(x) + x^2 Q'(x)) \Rightarrow$

$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2\nu}{x}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)} + x R(x)$, где $Q(x)$, $p(x)$ и $R(x)$ – ограничены в т. $x=0$

Но т.к. оп-ль Вронского, построенный из решений ур-я Бесселя должен иметь вид: $W[J_\nu, J_{-\nu}] = \frac{C_\nu}{x} \Rightarrow C_\nu = -\frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)}$;

$R(x) \equiv 0 \Rightarrow W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2}{\pi x}\sin \pi\nu$, тогда $W[J_\nu, H_\nu^{(1)}] = \frac{2i}{\pi x}$, аналогично

$W[J_\nu, H_\nu^{(2)}] = -\frac{2i}{\pi x}$ ⊠.

2. $u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz$

её можно получить методом ин-ния по фазовой плоскости и методом распрос-я волн.

3. $\begin{cases} \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right) + \lambda_n y = 0 & [-1;1] \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$

4. С физической точки зрения $G(M, M_0, t)$ представляет собой тем-ру тела в т. $M$ в момент времени $t$, если в $t=0$ в т. $M_0$ мгновенно выделилось некоторое кол-во тепла.

5. Функция $G(M,Q)$ называется ф-цией Грина задачи Дирихле для ур. Гельмгольца в обл. $D$, если
1.) $G(M,Q) = \frac{1}{4\pi R_{MQ}}\exp(ikR) + \vartheta$, где $\vartheta$ решение $\Delta\vartheta + k^2\vartheta = 0$ в $D$
2.) $G(M,Q)\big|_{P\in S} = 0$.