

Вопросы и задачи по теоретической механике (Программа минимум. 2-й поток).

Движение механических систем при наложенных связях. Голономные связи. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера. Решение задачи динамики одномерной системы. Качественное исследование. Движение вблизи точек остановки. Период колебаний как функция энергии. Гармонический осциллятор. Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями (1-го рода). Законы сохранения для системы при наличии связей. Собственные и вынужденные одномерные колебания. Затухающие одномерные колебания. Аперiodический режим движения. Фазовая плоскость.

Движение частиц в центрально-симметричном поле. Общее решение задачи в квадратурах. Качественное исследование. Точки поворота. Классификация траекторий. Формулы для периода радиального движения частицы и смещения перигея в центральном поле. Условие замкнутости траекторий. Задача Кеплера. Вектор-интеграл Лапласа.

Система материальных точек. Внутренние силы. Законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и энергии системы точек. Аддитивные интегралы движения и свойства пространства-времени. Группа движений Галилея.

Механическое подобие. Теорема вириала. Задача двух тел. Общее решение задачи (в квадратурах) методом интегралов движения. Упругое рассеяние частиц. Эффективное поперечное сечение рассеяния. Формула Резерфорда. Падение частиц в центр поля и захват частиц. Полное сечение захвата частиц.

Уравнения Лагранжа в независимых координатах (вывод из общего уравнения механики) и их ковариантность при точечных преобразованиях. Обобщенный импульс и обобщенная энергия. Интегралы движения уравнений Лагранжа.

Функция Лагранжа заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Обобщенный потенциал. Обобщенная сила в уравнениях Лагранжа заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Общее решение уравнений Лагранжа механической системы с s степенями свободы вблизи положений устойчивого равновесия. Малые колебания динамических систем с s степенями свободы. Устойчивость движения. Теорема Лагранжа. Собственные частоты. Нормальные координаты. Векторы смещений. Задача об обмене колебаниями в системе двух слабосвязанных математических маятников. Биения.

Неособенные лагранжианы. Представление уравнений Лагранжа в эквивалентной форме уравнений Гамильтона. Интегральные принципы механики. Принцип наименьшего действия. Модифицированный принцип Гамильтона. Гамильтоновы системы. Канонические уравнения. Скобки Пуассона. Теорема Пуассона. Функция Гамильтона заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Интегралы движения гамильтоновой системы.

Канонические преобразования. Производящие функции и инварианты канонических преобразований. Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби. Метод разделения переменных переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и решения канонических уравнений. Консервативные гамильтоновы системы. Укороченное действие. Канонические переменные "действие-угол". Переменные "действие-угол" и общие свойства условно-периодических движений. Условие полностью вырожденного движения.

Понятие об интегрируемых механических системах. Теорема Лиувилля об интегрируемости. Примеры интегрируемых систем. Механические системы с медленно-меняющимися параметрами. Адиабатические инварианты.

Число степеней свободы твердого тела. Углы Эйлера. Угловая скорость твердого тела. Кинематические уравнения Эйлера.

Импульс, момент импульса и кинетическая энергия твердого тела. Тензор инерции твердого тела и его свойства. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера. Функция Лагранжа тяжелого симметрического волчка. Интегралы движения.

Характерные свойства и способы описания сплошной среды. Поле перемещений. Тензоры и векторы полей поворотов и деформаций. Поле скоростей. Тензоры и векторы, характеризующие поля вихря и скорости деформаций.

Объемные и поверхностные силы. Тензор локальных напряжений. Изэнтропическое движение сплошной среды. Уравнения Эйлера. Баротропное движение идеальной жидкости. Уравнения движения в векторной форме. Теоремы Бернулли и Коши. Уравнения неразрывности для массы, импульса и энергии идеальной жидкости. Потоки энергии и импульса сплошной среды. Сжимаемая сплошная среда. Звуковые волны. Эффект Доплера. Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа. Число Маха. Поверхности разрыва в однородном потоке сжимаемого газа. Ударные волны. Ударная адиабата Гюгонно.

Касательные напряжения. Тензор напряжений "линейной" вязкой жидкости. Динамически-подобные течения. Число Рейнольдса.

1. Найти закон движения частицы массы m в поле $U(x) = -U_0 \cos(x/a)$, $a > 0$, если в начальный момент времени $v^2(0) = 4U_0/m$, а $x(0) = 0$.
2. Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда e массы m в скрещенных магнитном \mathbf{B} (в калибровке векторного потенциала $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$) и электрическом $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ полях. Указать первые интегралы уравнений Лагранжа. Найти закон движения заряда, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ радиус вектор частицы $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ а вектор скорости $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Найти границы области движения заряда по координате x , если $\mathbf{r}(0) = (h, 0, 0)$, а $\mathbf{v}(0) = (v, 0, 0)$.
3. Составить функцию и уравнения Лагранжа частицы с зарядом e , массой m , находящейся в полости гладкой трубки исчезающе малого радиуса, изогнутой в форме окружности радиуса R . Трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг диаметра окружности. Вдоль оси вращения действует поле тяжести \mathbf{g} и магнитное поле \mathbf{H} . Найти первый интеграл уравнений Лагранжа и закон движения в квадратурах.
4. Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда e массы m в однородном магнитном поле \mathbf{H} (в калибровке векторного потенциала $\mathbf{A} = (yH/2, -xH/2, 0)$) и электрическом поле $\mathbf{E} = -(ax, ay, 0)$, $a > 0$. Найти все первые интегралы уравнений Лагранжа. Найти закон движения заряда, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ радиус вектор частицы $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, а вектор скорости $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.
5. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц массы m в центральном поле $U(r) = U_0$, $r < R$, $U(r) = 0$, $r > R$. Энергия частицы E_0 .
6. Частица с массой m и зарядом e может двигаться по поверхности конуса с углом при вершине 2α . Ось конуса вертикальна. В направлении оси конуса действуют поле тяжести \mathbf{g} и магнитное поле \mathbf{H} . Записать функцию Лагранжа в цилиндрических координатах и найти закон движения в квадратурах. Найти все первые интегралы уравнений Лагранжа.
7. Частица может двигаться по наклонной плоскости (составляющей угол α с горизонтом) из точки B в точку A , упруго отражаясь от стенки в точке A . Найти, как изменяется энергия и максимальная высота подъема частицы при медленном изменении угла α .
8. Найти траекторию и закон движения частицы с зарядом e , массой m в неоднородном электрическом поле $\mathbf{E} = (ax, 0, bz)$ с помощью уравнения Гамильтона-Якоби.
9. Стержень массы m и длины l движется в вертикальной плоскости так, что один из его концов скользит по горизонтальной прямой (есть поле тяжести). Найти закон движения стержня в квадратурах.
10. Найти, как изменяется амплитуда колебаний математического маятника при медленном изменении его длины.
11. Найти период колебаний частицы массы m в поле $U(x) = -a/(|x|+b)$, $a, b > 0$. Энергия частицы E_0 .
12. Как изменяется энергия частицы с массой m и зарядом e в центральном поле $U(r)$ при медленном (адиабатическом) включении слабого однородного магнитного поля напряженности \mathbf{H} .
13. Найти траекторию и закон движения (в квадратурах) частицы в поле $U(r) = ar^2$, $a > 0$, с помощью уравнения Гамильтона-Якоби (в сферических координатах).
14. Стержень массы m и длины l скользит по сторонам прямого угла без трения. Написать функцию Лагранжа и найти закон движения в квадратурах.
15. Найти траекторию (и угловое расстояние между двумя последовательными прохождениями точек r_{min}) частицы с массой m , энергией $E_0 < 0$ в центральном поле $U(r) = -a/r + b/r^2$, $a, b > 0$.
16. Найти траекторию и закон движения заряда e , массы m в однородном магнитном поле \mathbf{H} (векторный потенциал $\mathbf{A} = (yH, 0, 0)$), решая уравнения Гамильтона. Указать все первые интегралы уравнений движения. В момент времени $t_0 = 0$ радиус вектор частицы $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, а вектор скорости $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.
17. Вычислить скобки Пуассона $[L_i, L_j]$, где L_i - декартовы компоненты вектора момента импульса частицы.
18. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц массы m в центральном поле $U(r) = a/r - a/R$, $r < R$, $U(r) = 0$, $r > R$. Энергия частицы E_0 .
19. Вычислить скобки Пуассона $[v_i, v_j]$, где v_i - декартовы компоненты вектора скорости заряда e , массы m в однородном магнитном поле \mathbf{H} .
20. Как изменяется механическая энергия и параметр орбиты финитного движения частицы с массой m в центральном поле $U(r) = -a/r$, $a > 0$, при адиабатическом изменении параметра a .
21. Система описывается лагранжианом

$$L = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2 - k(2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)/2, \quad m, k > 0.$$

Найти собственные частоты и закон движения, если $x_1(0) = a$, $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

22. Найти полное сечение захвата частиц массы m шариком радиуса R , находящимся в центре поля $U(r) = a/r^2 - a/r^4$, $a, b > 0$. Энергия частицы E_0 .

23. Как изменяется энергия системы, описываемой лагранжианом

$$L = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2 - k(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)/2, \quad m, k > 0$$

при адиабатическом изменении параметра k